Ordu Üniv. Bil. Tek. Derg., Cilt:3, Sayı:1, 2013,46-60/Ordu Univ. J. Sci. Tech., Vol:3, No:1,2013,46-60

SMARANDACHE EĞRİLERİNE AİT BİR UYGULAMA

Süleyman ŞENYURT[1*]   **Selin SİVAS**[1]

[1] *Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü*

ÖZET

Bu çalışmada, bir $\sim$ eğrisinin Frenet vektörleri T, N, B ve birim Darboux vektörü C olmak üzere NC-Smarandache eğrisi tanımlanarak bu eğri ile birlikte NB ve TNB-Smarandache eğrilerinin eğrilik ve torsiyonu hesaplanmıştır.

Key words**:** Smarandache Curves,

Mathematics Subject Classification (2010), 53A04.

AN APPLICATION OF SMARANDACHE CURVE

ABSTRACT

In this paper, Firstly we define *NC*-Smarandache curve, then we calculate the curvature and torsion of *NB* and *TNB*- Smarandache curves together with *NC*-Smarandache curve. Here *T*, *N* and *B* are Frenet vectors of a curve α and vector *C* is unit Darboux vector.

Key words**:** Smarandache Curves,

Mathematics Subject Classification (2010), 53A04.

[*] *Sorumlu yazar:* senyurtsuleyman@hotmail.com

1.GİRİŞ

Eğrilerin diferansiyel geometrisi üzerinde birçok çalışmalar mevcuttur. 2008 de M. Turgut ve S. Yılmaz tarafından yapılan *Smarandache Curves in Minkowski Space-time* isimli çalışmada Smarandache eğrileri tanımlanmıştır, [1]. Daha sonra bu eğriler, farklı uzaylarda farklı çatılar ele alınarak incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir, [2,3,4,5,6].

2. GENEL BİLGİLER

$\sim : I \subset IR \rightarrow E^3$, $\sim(s) = \left(\sim_1(s), \sim_2(s), \sim_3(s)\right)$ regüler birim hızlı bir eğri olsun. ~ eğrisinin Frenet 3-ayaklısı

$$\begin{cases} T(s) = \sim'(s) \\ N(s) = \dfrac{\sim''(s)}{\left\|\sim''(s)\right\|} \\ B(s) = T(s) \times N(s) \end{cases} \qquad (2.1)$$

dır. Eğrinin eğriliği $©(s)$, torsiyonu $²(s)$ ile gösterilirse

$$\begin{cases} ©(s) = \left\|\sim''(s)\right\| \\ ²(s) = \dfrac{\langle \sim' \times \sim'', \sim''' \rangle}{\left\|\sim' \times \sim''\right\|^2} \end{cases} \qquad (2.2)$$

olur. Bu durumda Frenet formülleri

$$\begin{cases} T'(s) = ©(s)N(s), \\ N'(s) = -©(s)T(s) + ²(s)B(s), \\ B'(s) = -²(s)N(s) \end{cases} \qquad (2.3)$$

şeklinde verilir, [7]. ~ eğrisinin $\{T, N, B\}$ Frenet çatısına bağlı olarak oluşan W Darboux vektörünün B binormal vektörü ile yaptığı açı ¨ ile gösterilirse

$$\sin ¨ = \frac{²}{\|W\|} \quad , \quad \cos ¨ = \frac{©}{\|W\|} \tag{2.4}$$

olur ve buradan birim Darboux vektörü

$$C = \sin ¨\, T + \cos ¨\, B \tag{2.5}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 1.1: Konum vektörü, herhangi bir ~ eğrisinin Frenet çatıları tarafından oluşturulan ve bu vektör tarafından çizilen regüler eğriye *Smarandache eğrisi* denir,[1].

Tanım1.2: $\sim : I \to E^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun.

$$_{TN}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T+N) \text{ eğrisine } TN \text{ -Smarandache eğrisi,} \tag{2.6}$$

$$_{NB}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N+B) \text{ eğrisine } NB \text{ -Smarandache eğrisi,} \tag{2.7}$$

$$_{TNB}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}}(T+N+B) \text{ eğrisine } TNB \text{ -Smarandache eğrisi denir, [2].} \tag{2.8}$$

TN -Smarandache eğrisinin eğriliği $©_{TN}$ ve torsiyonu $²_{TN}$ gösterilirse

$$©_{TN} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{¢^2 + «^2 + ¦^2}}{\left(2©^2 + ²^2\right)^2}, \tag{2.9}$$

$$²_{TN} = \frac{\sqrt{2}\left[\left(©^2 + ²^2 - ©'\right)\left(©± + ²µ\right) + ©\left(©² + ²'\right)\left(¤ - µ\right)\right]}{\left[²\left(2©^2 + ²^2\right) + ©²' - ©²'\right]^2 + \left(©'² - ©²'\right)^2 + \left(2©^3 + ©²^2\right)^2}$$
$$+ \frac{\sqrt{2}\left(©^2 + ©'\right)\left(©± - ²¤\right)}{\left[²\left(2©^2 + ²^2\right) + ©²' - ©²'\right]^2 + \left(©'² - ©²'\right)^2 + \left(2©^3 + ©²^2\right)^2} \tag{2.10}$$

bulunur. Burada

$$\begin{cases} ¢ = -©^{2}\left(2©^{2} + ²^{2}\right) - ²\left(²©' - ©²'\right) \\ « = -©^{2}\left(2©^{2} + 3²^{2}\right) - ²\left(²^{3} - ²©' + ©²'\right) \\ ¦ = ©²\left(2©^{2} + ²^{2}\right) - 2©\left(²©' - ©²'\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} µ = ©^{3} + ©\left(²^{2} - 3©'\right) - ©'' \\ ¤ = -©^{3} - ©\left(²^{2} + 3©'\right) - 3²²' \\ ± = -©^{2}² - ²^{3} + 2²©' + ©²' + ²'' \end{cases}$$

dır, [2].

3.Smarandache Eğrilerinin Uygulamaları

$\sim : I \to E^3$ birim hızlı regüler eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. Konum vektörü

$$(s) = \frac{a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s)}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s) + c^2(s)}} \tag{3.1}$$

olan vektörün çizdiği regüler eğriye Smarandache eğrisi denilmektedir.Burada $a = \sin ¨ (s), b = 1, c = \cos ¨ (s)$ alınırsa(3.1) ifadesi

$$(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin ¨ (s)T(s) + \cos ¨ (s)B(s) + N(s)\right)$$

olur.(2.5) bağıntısı burada yerine yazılırsa elde edilen yeni eğri

$$_{NC}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(C(s) + N(s)\right) \tag{3.2}$$

olur ve bu eğri NC -Smarandache eğrisi olarak isimlendirilir. $_{NC}$ eğrisinin yay parametresi s ile gösterilirse

$$\frac{d\ _{NC}}{ds}\frac{ds}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(¨'\cos ¨ - ©\right)T + \left(² - ¨'\sin ¨\right)B\right] \tag{3.3}$$

olur. Norm alınırsa $\frac{ds}{ds}=\frac{\sqrt{(¨')^2+\|W\|^2-2¨'\|W\|}}{\sqrt{2}}$ bulunur. Buradan $_{NC}$ eğrisinin teğet vektörü

$$T_{NC}(s)=\frac{(¨'\cos¨-©)T+(²-¨'\sin¨)B}{\sqrt{(¨')^2+\|W\|^2-2¨'\|W\|}} \qquad (3.4)$$

şeklinde olur. Bu ifadenin tekrar türevi alınırsa

$$\begin{cases}
¦_1=²\,^2¨''\cos¨-©¨'¨''\cos^2¨-²¨'¨''\sin¨\cos¨-(¨')^4\sin¨-©^2(¨')^2\sin¨-²^2(¨')^2\sin¨+\\
2©(¨')^3\sin¨\cos¨+2²(¨')^3\sin^2¨-©'(¨')^2-²^2©'-2©©¨'\cos¨-2©'¨'²\sin¨-²²'¨'\cos¨\\
+©'(¨')^2\cos^2¨+²'(¨')^2\sin¨\cos¨+©¨'¨''+©²²'-©²¨''\sin¨-¨'²©\sin¨\\
\\
¦_2=©(¨')^3\cos¨+3©^3¨'\cos¨+3²^2©¨'\cos¨-2©^2(¨')^2\cos^2¨-4©²(¨')^2\sin¨\cos¨-\\
©^2(¨')^2-©^4-2©^2²^2+3©^2²¨'\sin¨-²^2(¨')^2+3²^3¨'\sin¨+²(¨')^3\sin¨-2²^2(¨')^2\sin^2¨\\
\\
¦_3=²'(¨')^2+©^2²'-2©²'¨'\cos¨-©^2¨''\sin¨+©¨'¨''\sin¨\cos¨+²¨'¨''\sin^2¨-(¨')^4\cos¨\\
-©^2(¨')^2\cos¨-²^2(¨')^2\cos¨+2©(¨')^3\cos^2¨+2²(¨')^3\sin¨\cos¨-²¨'¨''-²©©'+\\
²©¨''\cos¨+²©'¨'\cos¨+©©'¨'\sin¨-©'(¨')^2\sin¨\cos¨-²'(¨')^2\sin^2¨
\end{cases}$$

olmak üzere

$$T'_{NC}(s)=\frac{\sqrt{2}\,(¦_1T+¦_2N+¦_3B)}{\left((¨')^2+\|W\|^2-2¨'\|W\|\right)^2} \qquad (3.5)$$

bulunur. $_{NC}$ eğrisinin eğriliği $©_{NC}$ ile gösterilirse

$$©_{NC}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{¦_1^2+¦_2^2+¦_3^2}}{\left((¨')^2+\|W\|^2-2¨'\|W\|\right)^2} \qquad (3.6)$$

olur. Diğer yandan $N_{NC} = \dfrac{T'_{NC}(s)}{\left\| T'_{NC}(s) \right\|}$ olduğundan asli normal vektör

$$N_{NC} = \frac{¦_1 T + ¦_2 N + ¦_3 B}{\sqrt{¦_1^2 + ¦_2^2 + ¦_3^2}} \qquad (3.7)$$

olur. $B_{NC} = T_{NC} \times N_{NC}$ ifadesinden de binormal vektör

$$B_{NC} = \frac{¦_2\left(¨'\sin ¨ - ²\right)T + \left(¦_1 \cdot \left(² - ¨'\sin ¨\right) - ¦_3\left(¨'\cos ¨ - ©\right)\right)N + \left(¦_2\left(¨'\cos ¨ - ©\right)\right)B}{\sqrt{\left(\left(¨'\right)^2 + \|W\|^2 - 2¨'\|W\|\right)\left(¦_1^2 + ¦_2^2 + ¦_3^2\right)}} \qquad (3.8)$$

şeklinde bulunur. $_{NC}$ eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla,

$$''_{NC} = \frac{\left(¨''\cos ¨ - \left(¨'\right)^2 \sin ¨ - ©'\right)T + \left(©¨'\cos ¨ + ²¨'\sin ¨ - ©^2 - ²^2\right)N + \left(²' - ¨''\sin ¨ - \left(¨'\right)^2 \cos ¨\right)B}{\sqrt{2}} \qquad (3.9)$$

$$\begin{cases} \mu_1 = ¨'''\cos ¨ - 3¨'¨''\sin ¨ - \left(¨'\right)^3 \cos ¨ - ©'' - ©^2¨'\cos ¨ - ©²¨'\sin ¨ + ©^3 + ©²^2 \\ \mu_2 = 2©¨''\cos ¨ - 2©\left(¨'\right)^2 \sin ¨ - 3©©' + ©¨''\cos ¨ + ²'¨'\sin ¨ + 2²¨''\sin ¨ + 2\left(¨'\right)^2 \cos ¨ - 3²²' \\ \mu_3 = \left(©²¨' - 3¨'¨''\right)\cos ¨ + \left(²^2¨' - ¨''' + \left(¨'\right)^3\right)\sin ¨ - ©^2² - ²^3 + ²'' \end{cases}$$

olmak üzere

$$\alpha'''_{NC} = \frac{\mu_1 T + \mu_2 N + \mu_3 B}{\sqrt{2}} \qquad (3.10)$$

olur. (2.2) bağıntısında (3.3), (3.9) ve (3.10) ifadeleri yerine yazılırsa α_{NC} eğrisinin τ_{NC} torsiyonu

$$\tau_{NC} = \frac{\sqrt{2}\left(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3\right)}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \qquad (3.11)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\begin{cases} \lambda_1 = \left(\kappa(\varphi')^2 \sin\varphi\right)\cos\varphi + \left(\tau(\varphi')^2 \sin\varphi - \kappa^2\varphi' - 2\tau^2\varphi'\right)\sin\varphi + \kappa^2\tau + \tau^3 \\ \lambda_2 = \left(\tau\varphi'' - \tau'\varphi' - \kappa(\varphi')^2\right)\cos\varphi + \left(\kappa'\varphi' - \tau(\varphi')^2 - \kappa\varphi''\right)\sin\varphi - \tau\kappa' + (\varphi')^3 + \kappa\tau' \\ \lambda_3 = \left(\kappa(\varphi')^2 \cos\varphi + \tau(\varphi')^2 \sin\varphi - 2\kappa^2\varphi' - \tau^2\varphi'\right)\cos\varphi - \kappa\tau\varphi'\sin\varphi + \kappa^3 + \kappa\tau^2. \end{cases}$$

Sonuç 3.1: $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$, eğriliği κ ve torsiyonu τ olsun. NC-Smarandache eğrisinin κ_{NC} eğriliği ve τ_{NC} torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{NC} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\varpi_1^2 + \varpi_2^2 + \varpi_3^2}}{\left((\varphi')^2 + \|W\|^2 - 2\varphi'\|W\|\right)^2},$$

$$\tau_{NC} = \frac{\sqrt{2}\left(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3\right)}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$$

şeklinde verilir.

(2.7) bağıntısında NB-Smarandache eğrisinin yay parametresi s ile gösterilirse

$$\frac{d\ _{NB}}{ds}\frac{ds}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-©T-²N+²B\right) \qquad (3.12)$$

olur ve norm alınırsa $\frac{ds}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{©^2+2²^2}$ bulunur. Buradan $\ _{NB}$ eğrisinin teğet vektörü

$$T_{NB}(s)=\frac{-©T-²N+²B}{\sqrt{©^2+2²^2}} \qquad (3.13)$$

şeklinde olur. Bu ifadenin tekrar türev alınırsa ve

$$\begin{cases} ¢_1=2²^2\left(-©'+²©\right)+©²\left(©^2+2²'\right)\\ ¢_2=©\left(-©^3-²^2©+²©'\right)-²^2\left(3©^2+2²^2\right)\\ ¢_3=©^2\left(²'-²^2\right)-²\left(2²^3+©©'\right)\end{cases}$$

olmak üzere

$$T'_{NB}(s)=\frac{\sqrt{2}\left(¢_1T+¢_2N+¢_3B\right)}{\left(©^2+2²^2\right)^2} \qquad (3.14)$$

bulunur. Eğrilik tanımından $\ _{NB}$ eğrisinin $©_{NB}$ eğriliği

$$©_{NB}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{¢_1^{\,2}+¢_2^{\,2}+¢_3^{\,2}}}{\left(©^2+2²^2\right)^2} \qquad (3.15)$$

şeklinde olur. Diğer yandan $N_{NB}=\frac{T'_{NB}(s)}{\left\|T'_{NB}(s)\right\|}$ olduğundan asli normal vektör

$$N_{NB}=\frac{¢_1T+¢_2N+¢_3B}{\sqrt{¢_1^{\,2}+¢_2^{\,2}+¢_3^{\,2}}} \qquad (3.16)$$

olur. $B_{NB} = T_{NB} \times N_{NB}$ ifadesinden de binormal vektör

$$B_{NB} = \frac{-\text{²}\left[\text{¢}_3 + \text{¢}_2\right]T + \left[\text{²¢}_1 + \text{©¢}_3\right]N + \left[-\text{©¢}_2 + \text{²¢}_1\right]B}{\sqrt{\left(\text{©}^2 + 2\text{²}^2\right)\left(\text{¢}_1^2 + \text{¢}_2^2 + \text{¢}_3^2\right)}} \qquad (3.17)$$

şeklinde bulunur. $_{NB}$ eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri sırasıyla,

$$''_{NB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(-\text{©}' + \text{²©}\right)T - \left(\text{©}^2 + \text{²}^2 + \text{²}'\right)N + \left(\text{²}' - \text{²}^2\right)B\right\}, \qquad (3.18)$$

$$\begin{cases} \text{¤}_1 = -\text{©}'' + \text{©}\left(2\text{²}' + \text{©}^2\right) + \text{²}\left(\text{©}' + \text{©²}\right) \\ \text{¤}_2 = \text{©}\left(-3\text{©}' + \text{²©}\right) + \text{²}\left(-3\text{²}' + \text{²}^2\right) - \text{²}'' \\ \text{¤}_3 = -\text{²}\left(\text{©}^2 + \text{²}^2 + 3\text{²}'\right) + \text{²}'' \end{cases}$$

olmak üzere

$$'''_{NB} = \frac{\text{¤}_1 T + \text{¤}_2 N + \text{¤}_3 B}{\sqrt{2}} \qquad (3.19)$$

olur. (2.2) bağıntısında (3.12), (3.18) ve (3.19) ifadeleri yerine yazılırsa $_{NB}$ eğrisinin ²_{NB} torsiyonu

$$\text{²}_{NB} = \frac{\sqrt{2}\left[\left(\text{²}\left(2\text{²}^2 + \text{©}^2\right)\right)\text{¤}_1 + \left(-\text{©}'\text{²} + \text{©²}'\right)\text{¤}_2 + \left(\text{©}\left(\text{©}^2 + 2\text{²}^2 + \text{²}'\right) - \text{²©}'\right)\text{¤}_3\right]}{\left[\text{²}\left(2\text{²}^2 + \text{©}^2\right)\right]^2 + \left[-\text{©}'\text{²} + \text{©²}'\right]^2 + \left[\text{©}\left(\text{©}^2 + 2\text{²}^2 + \text{²}'\right) - \text{²©}'\right]^2} \qquad (3.20)$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 3.2: $\sim : I \to E^3$ eğrisinin Frenetçatısı $\{T, N, B\}$, eğriliği © ve torsiyonu ² olsun. NB-Smarandache eğrisinin ©_{NB} eğriliği ve ²_{NB} torsiyonu sırasıyla,

$$\kappa_{NB}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\text{¢}_1^{\,2}+\text{¢}_2^{\,2}+\text{¢}_3^{\,2}}}{\left(\kappa^2+2\tau^2\right)^2},$$

$$\tau_{NB}=\frac{\sqrt{2}\left[\left(\tau\left(2\tau^2+\kappa^2\right)\right)\text{¤}_1+\left(-\kappa'\tau+\kappa\tau'\right)\text{¤}_2+\left(\kappa\left(\kappa^2+2\tau^2+\tau'\right)-\tau\kappa'\right)\text{¤}_3\right]}{\left[\tau\left(2\tau^2+\kappa^2\right)\right]^2+\left[-\kappa'\tau+\kappa\tau'\right]^2+\left[\kappa\left(\kappa^2+2\tau^2+\tau'\right)-\tau\kappa'\right]^2}$$

şeklinde verilir.

(2.8) bağıntısında TNB-Smarandache eğrisinin yay parametresi s ile gösterilirse

$$\frac{d\ _{TNB}}{ds}\frac{ds}{ds}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[-\kappa T+\left(\kappa-\tau\right)N+\tau B\right] \qquad (3.21)$$

olur ve norm alınırsa $\frac{ds}{ds}=\frac{\sqrt{6}\sqrt{\kappa^2+\tau^2-\kappa\tau}}{3}$ bulunur. Buradan $_{TNB}$ eğrisinin teğet vektörü

$$T_{TNB}\left(s\right)=\frac{-\kappa T+\left(\kappa-\tau\right)N+\tau B}{\sqrt{2}\sqrt{\kappa^2+\tau^2-\kappa\tau}} \qquad (3.22)$$

şeklinde olur. Bu ifadenin tekrar türev alınırsa

$$\begin{cases}\text{ª}_1=\kappa^2\left(-2\kappa^2-4\tau^2+4\tau\kappa-\kappa^2\tau'\right)+\kappa\tau\left(\kappa'+2\tau^2+2\tau'\right)-2\kappa'\tau^2\\ \text{ª}_2=\kappa^2\left(-2\kappa^2-4\tau^2+2\kappa\tau-\tau'\right)+\tau^2\left(-2\tau^2+2\kappa\tau+\kappa'\right)+\kappa\tau\left(\kappa'-\tau'\right)\\ \text{ª}_3=2\kappa^2\left(\kappa\tau-2\tau^2+\tau'\right)+\tau^2\left(4\kappa\tau-2\tau^2+\kappa'\right)-\kappa\tau\left(\tau'+2\kappa'\right)\end{cases}$$

olmak üzere

$$T'_{TNB}\left(s\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\text{ª}_1T+\text{ª}_2N+\text{ª}_3B}{\left(\kappa^2+\tau^2-\kappa\tau\right)^2} \qquad (3.23)$$

bulunur. Eğrilik tanımından $_{TNB}$ eğrisinin κ_{TNB} eğriliği

$$©_{TNB} = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{ª_1^2 + ª_2^2 + ª_3^2}}{\left(©^2 + ²^2 - ©²\right)^2} \qquad (3.24)$$

şeklinde olur. Diğer yandan $N_{TNB} = \dfrac{T'_{TNB}(s)}{\left\|T'_{TNB}(s)\right\|}$ olduğundan asli normal vektör

$$N_{TNB} = \frac{ª_1 T + ª_2 N + ª_3 B}{\sqrt{ª_1^2 + ª_2^2 + ª_3^2}} \qquad (3.25)$$

olur. $B_{TNB} = T_{TNB} \times N_{TNB}$ ifadesinden de binormal vektör

$$B_{TNB} = \frac{\left(\left(© - ²\right)ª_3 - ²ª_2\right)T + \left(²ª_1 + ©ª_3\right)N - \left(©ª_2 + \left(© - ²\right)ª_1\right)B}{\sqrt{\left(2©^2 + 2²^2 - 2©²\right)\left(ª_1^2 + ª_2^2 + ª_3^2\right)}} \qquad (3.26)$$

şeklinde bulunur. $_{TNB}$ eğrisinin ikinci ve üçüncü türevleri alınırsa sırasıyla,

$$''_{TNB} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(-©' - ©^2 + ©²\right)T - \left(©^2 + ©' + ²' + ²^2\right)N + \left(©² - ²^2 + ²'\right)B\right], \qquad (3.27)$$

$$\begin{cases} «_1 = ©'² - ©'' - 3©©' + 2©²' + ©^3 + ©²^2 \\ «_2 = ²^3 - ©^3 - 3\left(©©' + ²²'\right) - \left(-©'' + ²''\right) + ©²\left(© - ²\right) \\ «_3 = ²'' - ©^2² - 3²²' - ²^3 + 2²©' + ©²' \end{cases}$$

olmak üzere

$$'''_{TNB} = \frac{«_1 T + «_2 N + «_3 B}{\sqrt{3}} \qquad (3.28)$$

bulunur. (2.2) bağıntısında (3.21), (3.27) ve (3.28) ifadeleri yerine yazılırsa $_{TNB}$ eğrisinin $²_{TNB}$ torsiyonu

$$\text{²}_{TNB}=\frac{\sqrt{3}\left(\text{¯}_1\text{«}_1+\text{¯}_2\text{«}_2+\text{¯}_3\text{«}_3\right)}{\text{¯}_1^2+\text{¯}_2^2+\text{¯}_3^2} \qquad (3.29)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\begin{cases}\text{¯}_1=2\text{©²}\left(\text{©}-\text{²}\right)+\text{©²}'-\text{²©}'+2\text{²}^3\\ \text{¯}_2=\text{©²}'-\text{²©}'\\ \text{¯}_3=2\text{©}^3+\text{©²}'+2\text{©²}^2-2\text{©}^2\text{²}-\text{©}'\text{²}.\end{cases}$$

Sonuç 3.3: $\sim : I\rightarrow E^3$ eğrisinin Frenetçatısı $\{T,N,B\}$, eğriliği © ve torsiyonu ² olsun. TNB-Smarandache eğrisinin ©_{TNB} eğriliği ve ²_{TNB} torsiyonu sırasıyla,

$$\text{©}_{TNB}=\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{\text{a}_1^2+\text{a}_2^2+\text{a}_3^2}}{\left(\text{©}^2+\text{²}^2-\text{©²}\right)^2},$$

$$\text{²}_{TNB}=\frac{\sqrt{3}\left(\text{¯}_1\text{«}_1+\text{¯}_2\text{«}_2+\text{¯}_3\text{«}_3\right)}{\text{¯}_1^2+\text{¯}_2^2+\text{¯}_3^2}$$

şeklinde verilir.

Örnek3.1: $(s)=\left(\frac{9}{208}\sin 16s-\frac{1}{117}\sin 36s,-\frac{9}{208}\cos 16s+\frac{1}{117}\cos 36s,\frac{6}{65}\sin 10s\right)$

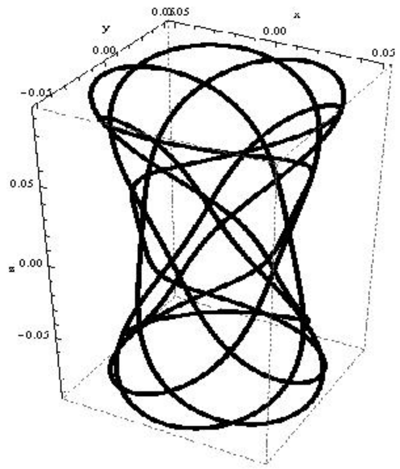
eğrisinin Frenet vektörleri ,[2], ve birim Darboux vektörü

$$\begin{cases}T(s)=\left(\frac{9}{13}\cos 16s-\frac{4}{13}\cos 36s,\frac{9}{13}\sin 16s-\frac{4}{13}\sin 36s,\frac{12}{13}\cos 10s\right)\\ N(s)=\left(\frac{12}{13}\cos 26s,\frac{12}{13}\sin 26s,-\frac{5}{13}\right)\\ B(s)=\left(-\frac{9}{13}\sin 16s-\frac{4}{13}\sin 36s,\frac{4}{13}\cos 36s+\frac{9}{13}\cos 16s,\frac{12}{13}\sin 10s\right)\\ C(s)=\left(\frac{5}{13}\cos 26s,\frac{5}{13}\sin 26s,\frac{12}{13}\right)\end{cases},$$

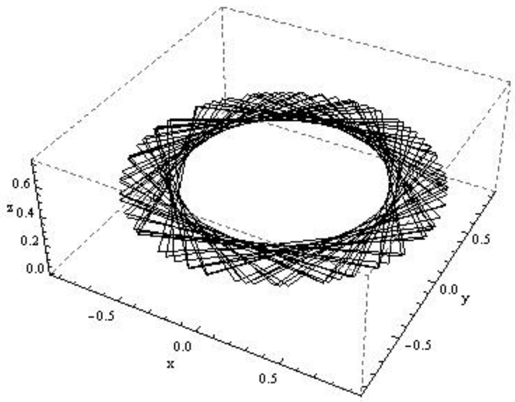
şeklinde bulunur (Şekil 1). Bu eğriye ait NC -Smarandache eğrisi,

$$_{NC}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{17}{13}\cos 26s, \frac{17}{13}\sin 26s, \frac{7}{13}\right)$$

olur (Şekil 2).



Şekil 1:   eğrisi



Şekil 2: $_{NC}$ Smarandache eğrisi

Örnek 3.2: $\sim(s) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ helis eğrisinin Frenet vektörleri ve birim Darboux vektörü

$$
\begin{cases}
T(s)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin\dfrac{s}{\sqrt{2}},\cos\dfrac{s}{\sqrt{2}},1\right)\\
N(s)=\left(-\cos\dfrac{s}{\sqrt{2}},-\sin\dfrac{s}{\sqrt{2}},0\right)\\
B(s)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\dfrac{s}{\sqrt{2}},-\cos\dfrac{s}{\sqrt{2}},1\right)\\
C(s)=(0,0,1)
\end{cases},
$$

şeklinde bulunur (Şekil 3). TN, NB, TNB ve NC -Smarandache eğrileri sırasıyla,

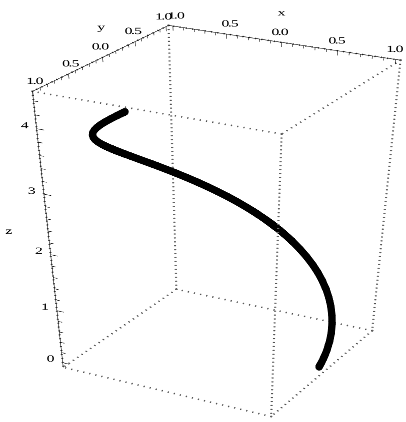
$$\sim_{TN}(s)=\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right),$$

$$\sim_{NB}(s)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right),$$

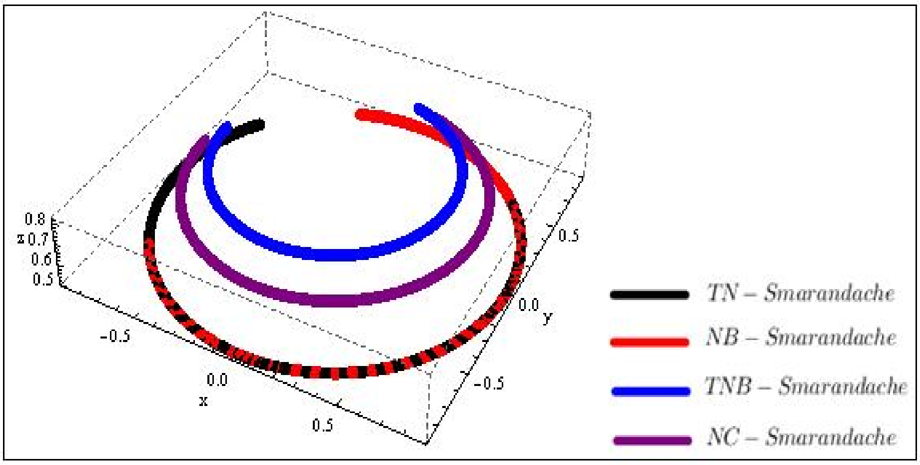
$$\sim_{TNB}(s)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{6}}{3}\right),$$

$$\sim_{NC}(s)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

olur (Şekil 4).



Şekil 3: ~ eğrisi



Şekil 4: $\sim_{TN}$, $\sim_{NB}$, $\sim_{TNB}$ ve $\sim_{NC}$ Smarandache eğrileri

KAYNAKLAR

[1] Turgut,M.,Yılmaz,S.,2008. Smarandache Curves in Minkowski space-time, *International Journal of Mathematical Combinatorics*, Vol.3, pp.51-55.

[2] Ali, A. T., 2010. Special Smarandache Curves in the Euclidean Space, *International Journal of Mathematical Combinatorics*, Vol.2, pp.30-36.

[3] Çetin M., Tuncer Y. and Karacan M. K., 2011. Smarandache Curves According to Bishop Frame in Euclidean 3- Space, *arXiv:* 1106. 3202 v1 [math. DG].

[4] Bektaş Ö.,Yüce S., 2013. Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in Euclidean 3- Space, *Romanian Journal of Mathematics and Computer science, vol:3,ıssue:1,pp:48-59.*

[5] Bayrak N., Bektaş Ö. and Yüce S.,2012. Special Smarandache Curves in E_1^3, *arXiv:*1204.566v1 [math.HO].

[6] Taşköprü K., Tosun M.,2014. Smarandache Curves on S^2, *Boletim da Sociedade paranaense de Matemtica* 3 srie. vol:32, *no:1, pp.51-59, ıssn-0 037-8712*.

[7] Hacısalioğlu, H.H.,1983. *Diferensiyel Geometri.* İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Mat. no.7, Malatya.